7 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi satu peubah. Solusi dari PDB adalah fungsi tertentu yang memenuhi persamaan tersebut. Berikut beberapa contoh PDB :

Persamaan Diferensial Biasa	Solusi Umum
$x' - x = e^x$	$x(t) = te^t + ce^t$
$x" + 9x = 0$	$x(t) = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$
$x' + \frac{1}{2x} = 0$	$x(t) = \sqrt{c - t}$

dengan c adalah sembarang konstanta yang tidak diketahui. Sehingga solusi PDB di atas disebut juga solusi umum. Solusi khusus bisa diperoleh bila ada lagi sebuah persamaan yang merupakan syarat batasnya. Secara umum, dapat ditulis:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) \text{ diberikan} \end{cases}$$

sehingga diperoleh

Persamaan Diferensial Biasa	Syarat Batas	Solusi
$x' = x + 1$	$x(0) = 0$	$x(t) = e^t - 1$
$x' = 6t - 1$	$x(1) = 6$	$x(t) = 3t^2 - t + 4$

Walaupun ada banyak metode untuk mencari solusi analitik dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB), tetapi pada umumnya terbatas pada PDB yang spesifik. Pada kenyataannya banyak PDB yang tidak dapat dicari solusi analitiknya tetapi solusi numeriknya dapat diperoleh. Walaupun solusi analitik dapat diperoleh tetapi rumit, biasanya lebih dipilih solusi numeriknya.

7.1 Metode Deret Taylor

Metode ini pada dasarnya adalah merepresentasikan solusinya dengan beberapa suku deret Taylor. Misalkan solusi dari persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam bentuk deret Taylor:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x"(t) + \frac{1}{3!}h^3x'''(t) + \frac{1}{4!}h^4x^{(4)}(t) + ... + \frac{1}{n!}h^nx^{(n)}(t) + ...$$

Bila hanya sampai suku $\frac{1}{n!}h^nx^{(n)}(t)$ pada Deret Taylor, maka dinamakan metode Deret Taylor orde-n.

Metode Deret Taylor orde-1 disebut metode Euler. Untuk mencari solusi numerik dari PDB:

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_a \end{cases}$$

sepanjang selang $[a, b]$, dua suku pertama pada deret Taylor yaitu:

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t)$$

Sehingga dapat ditulis

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t))$$

yang dapat digunakan mulai $t = a$ sampai ke $t = b$ dengan n-langkah yang panjang langkahnya $h = (b - a)/n$.

Contoh: Tentukan $x(2)$ dengan menggunakan Metode Euler ($n = 4$) untuk persamaan diferensial

$$x' = 1 + x^2 + t^3 \text{ bila diketahui syarat awal } x(1) = -4$$

Penyelesaian:

Untuk memperoleh hampiran yang lebih akurat, dapat digunakan Metode Deret Taylor orde yang lebih tinggi. Perhatikan persamaan diferensial berikut ini:

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 + t^3 \\ x(1) = -4 \end{cases}$$

Bila PD tersebut diturunkan beberapa kali terhadap t, diperoleh:

$$x' = 1 + x^2 + t^3$$

$$x'' = 2xx' + 3t^2$$

$$x''' = 2x'x' + 2xx'' + 6t$$

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= 2x''x' + 2x'x'' + 2x'x'' + 2xx''' + 6 \\ &= 2xx''' + 6x'x'' + 6 \end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh:

$$x(t+h) = x(t) + h\left[x'(t) + \frac{h}{2}\left[x''(t) + \frac{h}{3}\left[x'''(t) + \frac{h}{4}\left[x^{(4)}(t)\right]\right]\right]\right]$$

Tugas Mandiri

1. Tentukan $x(2)$ dengan menggunakan Metode Deret Taylor orde-4 satu langkah untuk persamaan diferensial

$$x' = 1 + x^2 + t^3 \text{ bila diketahui syarat awal } x(1) = -4$$

2. Hitung hampiran $x(0.1)$ dengan Metode Deret Taylor satu orde-3 satu langkah untuk persamaan diferensial

$$x'' = x^2 e^t + x'$$

7.2 Metoda Runge - Kutta orde 2 dan 4

Penggunaan metode Taylor memerlukan penurunan fungsi $f(t, y)$ secara analitik. Berikut akan diperkenalkan metode untuk menghasilkan y_i dengan akurasi yang sama seperti metode Taylor tanpa melakukan penurunan terhadap fungsi $f(t, y)$. Metode yang paling sederhana adalah **metode Runge Kutta orde 2**.

Perhatikan deret Taylor untuk $y(t + h)$ sebagai berikut

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}hy''(t) + \ldots$$

Bentuk $y'(t)$ dan $y''(t)$ diubah menjadi bentuk $f(t, y)$ dan turunan - turunan parsialnya. Perhatikan bahwa

$$y'(t) = f(t, y) \tag{27}$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk fungsi dua peubah persamaan dan mensubstitusikan persamaan (27) ke bentuk berikut diperoleh

$$\begin{aligned} y''(t) &= f_t t, y + f_y(t, y) y'(t) \\ &= f_t(t, y) + f_y(t, y) f(t, y) \end{aligned}$$

Sehingga deret Taylor untuk $y(t + h)$ dapat diubah menjadi sebagai berikut

$$y(t + h) = y(t) + hf(t, y) + \frac{1}{2}\left[f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)\right] + \ldots$$

Perhatikan metode Runge - Kutta orde 2 yang menggunakan kombinasi linear 2 fungsi untuk menyatakan $y(t + h)$

$$y(t + h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1 \tag{28}$$

dengan

$$\begin{aligned} f_0 &= f(t, y) \\ f_1 &= f(t + Ph, y + Qhf_0) \end{aligned}$$

Kita perlu mencari nilai - nilai A, B, P, Q sehingga persamaan (28) akurat. Ekspansi Taylor untuk fungsi dua peubah f_1 sebagai berikut.

$$f_1 = f(t, y) + Phf_t(t, y) + Qhf_y(t, y)f(t, y) + \ldots$$

Substitusikan persamaan ini ke persamaan (28) diperoleh persamaan untuk $y(t + h)$

$$y(t + h) = y(t) + (A + B)f(t, y) + BPh^2 f_t(t, y) + BQh^2 f_y(t, y)f(t, y) + \ldots$$

sehingga diperoleh persamaan - persamaan berikut

$$\begin{aligned} hf(t, y) &= (A + B)hf(t, y) \quad \rightarrow A + B = 1 \\ \frac{1}{2}h^2 f_t(t, y) &= BPh^2 f_t(t, y) \quad \rightarrow BP = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}h^2 f_y(t, y)f(t, y) &= BQh^2 f_y(t, y)f(t, y) \quad \rightarrow BQ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solusi yang sesuai dengan keadaan ini adalah

$$P = 1 \quad Q = 1 \quad A = B = \frac{1}{2}$$

Secara umum, metode Runge - Kutta orde 2 adalah sebagai berikut

$$y(t + h) = y(t) + \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$$

dengan

$$\begin{cases} f_0 = hf(t, y) \\ f_1 = hf(t + h, y + f_0) \end{cases}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh metode Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut

$$y(t + h) = y(t) + \frac{1}{6}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$$

dengan

$$\begin{cases} f_0 = hf(t, y) \\ f_1 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}f_0\right) \\ f_2 = hf\left(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}f_1\right) \\ f_3 = hf(t + h, y + f_2) \end{cases}$$

Tugas Mandiri Untuk setiap soal - soal berikut selesaikan persamaan diferensial dengan metode Runge- Kutta orde 2 dan 4. Gunakan $h = 0.2$ sebanyak 2 langkah. Selanjutnya gunakan $h = 0.1$ dan lakukan sebanyak 4 langkah. Bandingkan solusi eksak untuk $y(0.4)$ dengan aproksimasi tersebut.

(a) $y' = t^2 - y$ dengan $y(0) = 1$, $y(t) = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

(b) $y' = 3y + 3t$ dengan $y(0) = 1$, $y(t) = \frac{(}{4})(3)e^{3t} - t - \frac{1}{3}$

(c) $y' = -ty$ dengan $y(0) = 1$, $y(t) = e^{-t^2/2}$

(d) $y' = e^{-2t} - 2$ dengan $y(0) = \frac{1}{10}$, $y(t) = \frac{1}{10}e^{-2t} + te^{-2t}$

(e) $y' = 2ty^2$ dengan $y(0) = 1$, $y(t) = 1/(1 - t^2)$